Série 8

Solution 33. a) Soit $W = \max(U_1, \ldots, U_n)$ et $U_1, \ldots, U_n \overset{\text{iid}}{\sim} U(0,1)$;
La fonction de répartition de W est :

$$\begin{aligned}
F_W(w) = \Pr(W \leq w) &= \Pr(\max(U_1, \ldots, U_n) \leq w) \\
&= \Pr(U_1 \leq w, \ldots, U_n \leq w) \\
&= \Pr(U_1 \leq w) \times \ldots \times \Pr(U_n \leq w) \\
&= \Pr(U_1 \leq w)^n = F_{U_1}(w)^n = w^n, \text{pour } 0 \leq w \leq 1.
\end{aligned}$$

La fonction de densité de W est ainsi :

$$f_W(w) = \begin{cases} nw^{n-1}, & 0 \leq w \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

b) Soit $V = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \exp(\lambda)$.
La fonction de répartition de V est :

$$\begin{aligned}
F_V(v) &= \Pr(\min(X_1, \ldots, X_n \leq v) \\
&= 1 - \Pr(\min(X_1, \ldots, X_n \geq v) \\
&= 1 - \Pr(X_1 \geq v, \ldots, X_n \geq v) \\
&= 1 - \Pr(X_1 \geq v) \times \ldots \times \Pr(X_n \geq v) \\
&= 1 - \Pr(X_1 \geq w)^n = 1 - \Big(1 - F_{X_1}(v)\Big)^n \\
&= 1 - e^{-n\lambda v}.
\end{aligned}$$

Donc $V \sim \exp(n\lambda)$, et sa fonction de densité est

$$f_V(v) = \begin{cases} n\lambda e^{-n\lambda v}, & 0 \leq v, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Solution 34. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes Bernoulli de probabilité p.

a) La fonction génératrice des moments de X_1 est

$$M_{X_1}(t) = (1-p)e^{t\times 0} + pe^{t \times 1} = 1 - p + pe^t.$$

b) La fonction génératrice des moments de $X_1 + \cdots + X_n$ est

$$M_{X_1+\cdots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \times \cdots \times M_{X_n}(t) = M_{X_1}(t)^n = \Big(1 - p + pe^t\Big)^n.$$

c) Soit $Y \sim B(m, q)$, alors

$$M_Y(t) = \sum_{x=0}^{m} e^{tx} \binom{m}{x} q^x (1-q)^{m-x} = \sum_{x=0}^{m} \binom{m}{x} (e^t q)^x (1-q)^{m-x} = \Big(1 - q + qe^t\Big)^m.$$

d) On voit que $M_{X_1+\cdots+X_n}(t) = M_Y(t)$ pour $m = n$ et $p = q$, ce qui était prévisible puisque nous avons prouvé dans les deux séries précédentes que la somme des essais du Bernoulli suit une loi Binomiale.

Solution 35. a) $Y \sim \mathcal{N}(165, 49)$ représente la taille d'une femme. On cherche à calculer $\Pr(Y \geq 178)$, puisque la moitié des hommes ont une taille inférieur à leur moyenne de 178 (qui est aussi leur médiane, la densité étant symétrique), et ainsi on cherche

$$\Pr(Y \geq 178) = \Pr\left(\frac{Y - 165}{\sqrt{49}} \geq \frac{178 - 165}{\sqrt{49}}\right) = 1 - \Phi(13/7) = 1 - 0.968 = 0.031.$$

b) Si $X \sim \mathcal{N}(178, 64)$ représente la taille d'un homme, alors on cherche à calculer $P(Y - X > 0) = \Pr(X - Y < 0)$. Comme X et Y sont des variables aléatoire normales indépendantes leur différence est aussi normale : $X - Y$ est normale de moyenne $178 - 165 = 13$ et de variance $64 + (-1)^2 \times 49 = 113$. Ainsi,

$$\Pr(X - Y \leq 0) = \Pr\left(\frac{X - Y - 13}{\sqrt{113}} \leq \frac{0 - 13}{\sqrt{113}}\right) = \Phi(\tfrac{0-13}{\sqrt{113}}) \doteq \Phi(-1.22) = 1 - \Phi(1.22) \doteq 0.11.$$

Solution 36. 1. Comme $X_{1,2}, X_{1,3}, X_{1,3}, X_{1,4}, X_{1,4}$ sont quatre variables de Bernoulli indépendantes, il y a $2^4 = 16$ différentes configurations, et clairement $S \sim B(4, \frac{1}{2})$, donc le nombre de manières d'avoir $S = 0, 1, 2, 3, 4$ est respectivement $1, 4, 6, 4, 4, 1$.

Il est alors facile de vérifier (par exemple, en dessinant un arbre) que le tableau complet est

s	0	1	1	2	2	3	3	3	4
t	0	0	1	0	1	0	1	2	4
Nombre de configurations N_{st}	1	3	1	1	5	0	0	4	1

Clairement, $\Pr(S = s, T = t) = N_{st}/16$.

2. Comme S a une distribution binomiale avec dénominateur $n = 4$ et probabilité $\frac{1}{2}$, les probabilités que $S = 0, 1, 2, 3, 4$ sont $1/16, 4/16, 6/16, 6/16, 4/16, 1/16$.

$$\begin{aligned}
\Pr(T = 0) &= (1 + 3 + 1)/16 = 5/16, \\
\Pr(T = 1) &= (1 + 5)/16 = 6/16, \\
\Pr(T = 2) &= 4/16, \\
\Pr(T = 4) &= 1/16,
\end{aligned}$$

où nous notons que la probabilité totale est $(5 + 6 + 4 + 4 + 1)/16 = 1$. Les variables S et T ne sont pas clairement indépendantes ; par exemple, $S = 0$ implique $T = 0$.

3. La distribution conditionnelle de S sachant $T = 1$ est

$$\begin{aligned}
\Pr(S = 1 \mid T = 1) &= \frac{\Pr(S = 1, T = 1)}{\Pr(T = 1)} = \frac{1/16}{6/16} = 1/6, \\
\Pr(S = 2 \mid T = 1) &= \frac{\Pr(S = 2, T = 1)}{\Pr(T = 1)} = \frac{5/16}{6/16} = 5/6,
\end{aligned}$$

Alors,

$$\mathrm{E}(S \mid T = 1) = \sum_s s\Pr(S = s \mid T = 1) = 1 \times \tfrac{1}{6} + 2 \times \tfrac{5}{6} = 11/6.$$